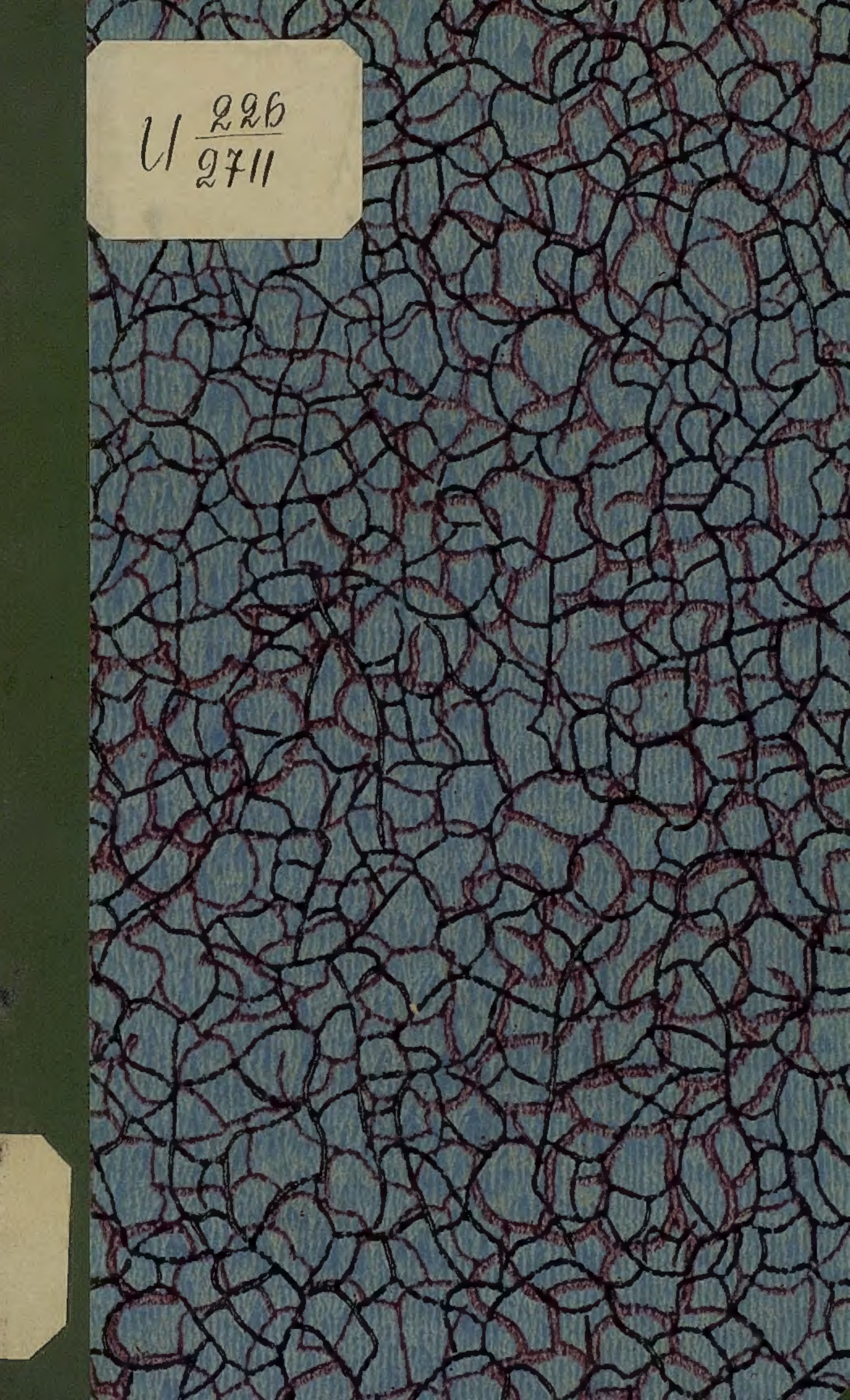


ОБЪ ОПРЕДѢЛЕНІИ ВЫСОТЪ ПОСРЕДСТВОМЪ БУМАЖНАГО ЗМѢЯ.

Соч.
Д-ра А. Попова.



КАЗАНЬ.
Печатано въ Университетской Типографіи.
1846.

Перепечатано изъ III книжки Ученыхъ Записокъ за 1845 годъ.





ОБЪ ОПРЕДѢЛЕНІИ ВЫСОТЪ
ПОСРЕДСТВОМЪ БУМАЖНАГО ЗМѢЯ,



Бумажный змѣй, по употребленію въ опытахъ Электрическихъ, сдѣлался со времени Франклина весьма полезнымъ снарядомъ. Однакоже, можно по справедливости замѣтить что этотъ снарядъ весьма рѣдко бываетъ въ рукахъ Физиковъ. Бумажный змѣй, сдѣланный въ достаточныхъ размѣрахъ, могъ бы очень часто и съ большимъ удобствомъ доставить свѣдѣнія о температурѣ возвышенныхъ слоевъ атмосферы, о направленіи и силѣ вѣтра, также о количествѣ водяныхъ паровъ. Этотъ снарядъ имѣетъ даже преимущество предъ аэростатомъ, покрайнѣй мѣрѣ, для высотъ небольшихъ, потому что долгое время остается въ пространствѣ неподвижнымъ и позволяетъ съ точностію опредѣлить высоту на которой находится. Но тригонометрической способъ опредѣленія высоты требуетъ много времени и трудныхъ средствъ, по этому Аналитическое уравненіе кривой линіи, въ которую сгибается нитка отъ дѣйствія вѣтра, мнѣ кажется, можетъ обѣщать много пользы.

Еще въ 1840 году, я нашелъ это уравненіе и вмѣстѣ съ другими формулами, опредѣляющими высоту бумажнаго змѣя надъ горизонтомъ, изложилъ въ сочиненіи «Теорія равновѣсія змѣя» которое было представлено начальству Казанскаго Университета, но до сего времени еще не было напечатано. Въ этомъ извлеченіи, я ограничусь переченью формулъ, которыя должны служить наблюдателю-метеорологу для вычисленія высоты змѣя и каждой точки на нити.

Фигура бумажнаго змѣя предполагаеться прямоугольнымъ параллелограммомъ *ABCD*; по направленію діагоналей его *AC*, *BD* приклѣены тонкія лучинки, а съ другой стороны листа, отъ точекъ *A*, *B* и центра листа *O*, идутъ три нити соединяющіяся въ общій узелъ *E*, отъ котораго простирается длинная нить *ES* утверждающая змѣй. Длина нитей *AE* и *BE* обыкновенно бываетъ равна половинѣ діагонали *AC*; нить *OE* бываетъ короче двухъ прочихъ, такъ чтобы направленіе ея не удалялось много отъ нормала къ поверхности змѣя. Для прочности равновѣсія, кромѣ нитей *AE*, *BE*, *OE*, привязываютъ къ змѣю длинный хвостъ. Когда желаютъ змѣй пустить, то, взявъ нить *ES* близь точки *E*, бегутъ въ направленіи противномъ вѣтру, выпуская нить изъ руки мало по малу, и останавливаются когда змѣй подниметея уже на значительную высоту. Если плоскость змѣя будетъ поставлена подъ какимъ нибудь угломъ къ направленію вѣтра, то ударъ вѣтра разложится на двѣ силы: одна будетъ параллельна плоскости змѣя, другая перпендикулярна къ той же плоскости. Первая сила остается въ частичкахъ воздуха, между

тѣмъ какъ послѣдняя производитъ на поверхность змѣя нормальное давленіе. Если предположимъ направленіе вѣтра горизонтальнымъ и означимъ ψ тупой уголъ плоскости змѣя съ горизонтомъ, ϱ плотность воздуха, v равномѣрную скорость вѣтра, W нормальное давленіе отъ вѣтра на площадь змѣя S, то будетъ

$$W = \tfrac{3}{2} S \varrho v^2 \sin.^2 \psi, \qquad (1)$$

гдѣ употребляемъ коеффиціентъ $\frac{3}{2}$, слѣдуя извѣстной теоріи Г. Коріоли. (Calcul de l'effet des machines).

Если пренебрегаемъ треніемъ воздуха на поверхности змѣя, то условія равновѣсія приводятся къ тремъ слѣдующимъ:

1. Составная сила изъ напряженія въ нитяхъ пирамиды $ABCE$, вѣса змѣя и косвеннаго вѣса хвоста, разложенныхъ по направленію плоскости змѣя, равна нулю. Этимъ условіемъ уничтожается возможность поступательнаго движенія листа, по продолженію его плоскости.

2. Напряженіе въ нитяхъ AE и BE, разложенное по нормалу къ плоскости змѣя, равно косвенному вѣсу хвоста, разложенному по тому же направленію. Этимъ условіемъ уничтожается возможность обращательнаго движенія листа около своего центра.

3. Составная изъ напряженія въ нитяхъ пирамиды, косвеннаго вѣса хвоста и вѣса змѣя, разложенныхъ по нормалу

къ плоскости змѣя, равна и противоположна силѣ вѣтра, разложенной потому же направленію. По этому условію плоскость змѣя не можетъ отступать параллельно сама себѣ. Мы употребляемъ здѣсь для сокращенія выраженіе: косвенный вѣсъ хвоста, вмѣсто: вѣсъ хвоста разложенный по его направленію.

Выражая предъидущія уловія уравненіями, получимъ

$$(A)\qquad T\cos M - Q\cos N - q\cos\beta\sin(\psi-\beta) - p\sin.\psi = o\quad ,$$

$$(B)\qquad Q\sin.N + q\cos\beta\cos(\psi-\beta) = o\quad ,$$

$$(C)\qquad W - Q\sin.N - T\sin.M + q\cos\beta\cos(\psi-\beta) + p\cos\psi = o,$$

гдѣ означаемъ буквою T напряженіе въ нити OE, M острой уголъ линіи OE съ плоскостію змѣя, Q составную изъ напряженія въ нитяхъ AE и BE, N уголъ между направленіемъ силы Q и плоскостію змѣя, p вѣсъ листа вмѣстѣ съ лучинками, q и β вѣсъ хвоста и острый уголъ направленія его съ отвѣсною линіею. Если означимъ H' составную изъ силъ T и Q, то будетъ

$$(D)\qquad H'^2 = T^2 + Q^2 - 2\,T\,Q\cos(M+N)$$

что же касается до направленія силы H', то означая e уголъ $H'ET$, имѣемъ

$$(E)\qquad \sin.e = \frac{Q}{H'}\sin.(M+N)\,;$$

Наконецъ острой уголъ $Э'$, который составляетъ направленіе силы H' съ горизонтомъ, опредѣляется изъ уравненія

$$Э' = \psi + M + e - \pi , \qquad (F)$$

гдѣ π означаетъ мѣру двухъ прямыхъ угловъ. Прибавимъ къ тому, что углы M и N предполагаются извѣстными при данной длинѣ линій AE, BE, OE.

Изъ уравненія (B) заключаемъ, что напряженіе въ нитяхъ AE и BE равно нулю, какъ скоро хвостъ разстилается по продолженію плоскости змѣя, то есть, когда $\psi - \beta = \frac{\pi}{2}$. Это условіе легко выполняется, если нити AE и BE будутъ имѣть достаточную длину и вѣсъ хвоста, при значительной длинѣ, не будетъ слишкомъ великъ. Въ такомъ случаѣ, уравненія равновѣсія даютъ

$$\text{tng.}\, \psi = -\frac{H' \cos Э'}{p + q + H' \sin. Э'}, \qquad (2)$$

$$W = H' \sin. (\psi - Э') - p \cos \psi \qquad (3)$$

Если напряженіе въ нитяхъ AE и BE имѣетъ нѣкоторую опредѣленную величину, то формулы служащія для опредѣленія ψ и W принимаютъ весьма сложный видъ, такъ что почитаю безполезнымъ помѣстить ихъ здѣсь.

Нить ES сливается въ точкѣ E съ направленіемъ силы H', и еслибы ни какія другія силы не дѣйствовали, она пе-

редавала бы напряженіе H' на другой конецъ, простираясь по прямой линіи подъ угломъ $Э'$ къ горизонту.

Но тяжесть, дѣйствуя на каждый элементъ нити, сгибаетъ ее въ кривую линію, извѣстную подъ названіемъ *цѣпной*. Эта кривая получаетъ новыя измѣненія отъ ударовъ вѣтра, дѣйствующихъ въ различныхъ точкахъ по длинѣ нити. Строго разсждая, кривая образуемая нитью должна имѣть двойную кривизну, потому что направленіе и сила вѣтра могутъ измѣняться на различныхъ высотахъ. Но законъ подобныхъ измѣненій вообще неизвѣстенъ, по этому въ теоріи должно ограничиться случаемъ равномѣрнаго теченія воздуха, такъ чтобы сила и направленіе вѣтра оставались постоянными на всей длинѣ нити ES, которая предполагается цилиндрическою. Проведемъ чрезъ точку S вертикальную плоскость и въ ней прямоугольныя оси Sx, Sz, изъ коихъ Sz возмемъ въ направленіи противномъ дѣйствію тяжести и Sx параллельно направленію вѣтра. Означимъ s длину нити, считая отъ точки S до другой точки μ, опредѣленной коордонатами x, z. Если предположимъ плоскость змѣя перпендикулярною къ плоскости (xz), то ниодна точка нити невыступитъ изъ послѣдней плоскости; такъ что искомая кривая выразится однимъ уравненіемъ между z и x, или z и s. Пусть γ представляетъ давленіе отъ вѣтра на единицу длины нити, если бы эта сила дѣйствовала перпендикулярно къ направленію ея; давленіе по нормалу на элементъ ея ds, наклоненный къ оси x подъ угломъ ψ, будетъ $\gamma\, d\, s \sin.^2 \psi$. Если пренебрегаемъ треніемъ воздуха по длинѣ кривой и разсматриваемъ нить гибкою,

нерастяжимою и однородною, то условія равновѣсія элемента ds приводятся къ двумъ слѣдующимъ уравненіямъ

$$\gamma \sin.^3 \psi + \frac{d(N\cos\psi)}{ds} = o, \qquad (a)$$

$$\frac{dN}{ds} - p'\sin.\psi = o, \qquad (b)$$

которыя дополняются геометрическимъ отношеніемъ

$$dz = ds \sin\psi.$$

Мы означаемъ N и p' напряженіе нити въ точкѣ μ и вѣсъ той же нити, при длинѣ равной единицѣ. Опредѣленіе величины p' достигнетъ чрезвычайной вѣрности, если единицу длины назначимъ притомъ напряженіи, какое нить имѣетъ въ точкѣ S. Интегрированіе предъидущихъ уравненій даетъ

$$N = p'z + H, \qquad (c)$$

$$\frac{1}{p'}\log.(p'z + H) = \int \frac{\sin.\psi\, d\psi}{p'\cos\psi + \gamma\sin.^2\psi} + K,$$

гдѣ H и K означаютъ произвольныя постоянныя. Но, полагая $\psi = Э$, при $z = o$, изъ предъидущаго уравненія получимъ

$$\text{Log.}\left(\frac{p'z+H}{H}\right) = \frac{p'}{\sqrt{p'^2+4\gamma^2}}\text{Log.}\left(\frac{2\gamma\cos\psi-\lambda}{2\gamma\cos\psi-\mu}\cdot\frac{2\gamma\cos Э-\mu}{2\gamma\cos Э-\lambda}\right), \qquad (4)$$



гдѣ для сокращенія означаемъ

$$\lambda = p' + \sqrt{p'^2 + 4\gamma^2}, \qquad \mu = p' - \sqrt{p'^2 + 4\gamma^2}$$

Нетрудно понять что условіе $\gamma > p'$ существенно принадлежитъ теоріи равновѣсія змѣя, слѣдовательно предположеніе $\gamma = o$ не можетъ имѣть мѣста. Но какъ гипотезы $\gamma = o$, $p' = o$, взятыя въ отдѣльности, назначаютъ предѣлы положенія нити, то мы воспользуемся ими.

Во первыхъ, если предположимъ что нить сгибается только отъ дѣйствія тяжести и остается свободною отъ вѣтра, то получимъ обыкновенную цѣпную линію. Уравненіе (4), въ случаѣ $\gamma = o$, даетъ

$$z = \frac{H}{p'}\left(\frac{\cos Э}{\cos \psi} - 1\right)$$

и какъ $dz = ds \sin.\psi$, то по второмъ интегрированіи получимъ уравненіе кривой

$$(5) \qquad g'z + H = \sqrt{(p's + H)^2 + H^2 \cos^2 Э}$$

или въ прямоугольныхъ координатахъ x, z

$$(d) \quad p'z + H = \frac{H\cos.^2 Э}{2(1+\sin.Э)}\left\{\left(\frac{1+\sin.Э}{\cos.Э}\right)^2 e^{\frac{p'x}{H\cos.Э}} + e^{-\frac{p'x}{H\cos.Э}}\right\}$$

Во вторыхъ, если положимъ $p' = o$ и замѣтимъ притомъ что

$$\lim.\left(\frac{p'z+H}{H}\right)^{\frac{\sqrt{p'^2+4\gamma^2}}{p'}}=e^{\frac{2\gamma z}{H}},$$

то изъ уравненія (4) получимъ

$$\beta z=\text{Log.}\frac{1-\cos.\psi}{1+\cos.\psi}-\text{Log.}B,$$

гдѣ для сокращенія означаемъ

$$\frac{2\gamma}{H}=\beta, \qquad \frac{1-\cos.\,Э}{1+\cos.\,Э}=B.$$

И какъ $dz=ds\sin.\psi$, то по второмъ интегрированіи получимъ уравненіе кривой

$$\tfrac{1}{2}\beta z=\text{Log.}(\beta(s-c)+\sqrt{\beta^2(s-c)^2+4})-\text{Log.}2\sqrt{B} \qquad (6)$$

или въ прямоугольныхъ координатахъ

$$x=\frac{H}{\gamma\sin.\,Э}-\frac{1}{\beta\sqrt{B}}\left(e^{-\frac{1}{2}\beta z}+Be^{\frac{1}{2}\beta z}\right); \qquad (f)$$

слѣдовательно нить сгибается отъ дѣйствія вѣтра въ цѣпную линію, которой вогнутая сторона обращена противъ теченія воздуха и ось параллельна съ направленіемъ вѣтра. Мы полагаемъ что величина z будетъ опредѣлена съ достаточною вѣрностію, если поданному значенію s вычислимъ z изъ уравненія (6), потомъ $\cos.\psi$ изъ уравненія (e), то есть,

$$\cos.\psi=\frac{1-Be^{\beta z}}{1+Be^{\beta z}} \qquad (g)$$

и наконецъ вставимъ это значеніе $\cos.\psi$ въ уравненіе (4).

Если на нити въ точкѣ a повѣшено тѣло, напримѣръ термометръ, то погибаніе нити получитъ въ точкѣ a быстрое измѣненіе; такъ что равновѣсіе части Sa и другой части aE должно разсматривать особенно. Означимъ A уголъ съ осью x касательной линіи проходящей чрезъ первый элеменъ кривой aS, B напряженіе нити въ этомъ элементѣ; A' уголъ касательной проходящей чрезъ первой элементъ кривой aE, B' напряженіе въ этомъ элементѣ; означимъ также ω вѣсъ тѣла привязаннаго въ точкѣ a, λ длину нити aS, λ' длину aE, z' высоту точки a, $z' + z''$ высоту точки E. Если въ предъидущихъ формулахъ поставимъ λ на мѣсто s, и вычислимъ величины ψ и z, то будетъ $A = \psi$, $z' = z$; притомъ

$$B' = \sqrt{B^2 + \omega^2 + 2 B \omega \sin. A},$$

и если t будетъ уголъ между двумя касательными въ точкѣ a, то

$$\sin. t = \frac{\omega}{B'} \cos. A, \qquad A' = A + t$$

Опредѣливъ величины B' и A', можно разсматривать точку a за начало новой нити, такъ что, считая координаты отъ точки a параллельно прежнимъ осямъ x, z; стоитъ въ уравненія равновѣсія нити поставить B', A', λ' вмѣсто H, Э, s, чтобы получить z'' и прочія величины относящіяся къ точкѣ E.

Теорія равновѣсія змѣя содержитъ постоянныя величи-

ны, которыхъ точное опредѣленіе необходимо для полезнаго употребленія формулъ. Напряженіе H въ точкѣ S и уголъ $Э$ касательной линіи въ этой точкѣ съ горизонтомъ, можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: если на нити SE въ точкѣ m, немного удаленной отъ S, подвѣсимъ легкую чашку и насыплемъ въ нее столько песку, чтобы линія Sm приняла горизонтальное направленіе, то вѣсъ Q, чашки вмѣстѣ съ пескомъ, уничтожатъ напряженіе нити разложенное по оси z; слѣдовательно будетъ

$$Q = H \sin. Э$$

Съ другой стороны, если укрѣпимъ въ точкѣ S центръ удободвижнаго блока и обогнемъ по окружности его нить Sm, натянутую вѣсомъ R, равнымъ напряженію нити разложенному параллельно оси x, то будетъ

$$R = H \cos. Э$$

Итакъ получимъ $$H = \sqrt{R^2 + Q^2},$$

$$\operatorname{tng}. Э = \frac{Q}{R}$$

Наконецъ, для опредѣленія постоянной γ, или пропорціональной съ нею величины β, возьмемъ уравненіе обратное съ (6), то есть,

$$B e^{\frac{1}{2}\beta z} - e^{-\frac{1}{2}\beta z} - \beta . s\sqrt{B} = B - 1$$

и предположимъ тотъ случай, когда въ разложеніи показательныхъ функцій $e^{\frac{1}{2}\beta z}$, $e^{-\frac{1}{2}\beta z}$ достаточно остановиться на членахъ пропорціональныхъ второй степени отъ β, тогда получимъ

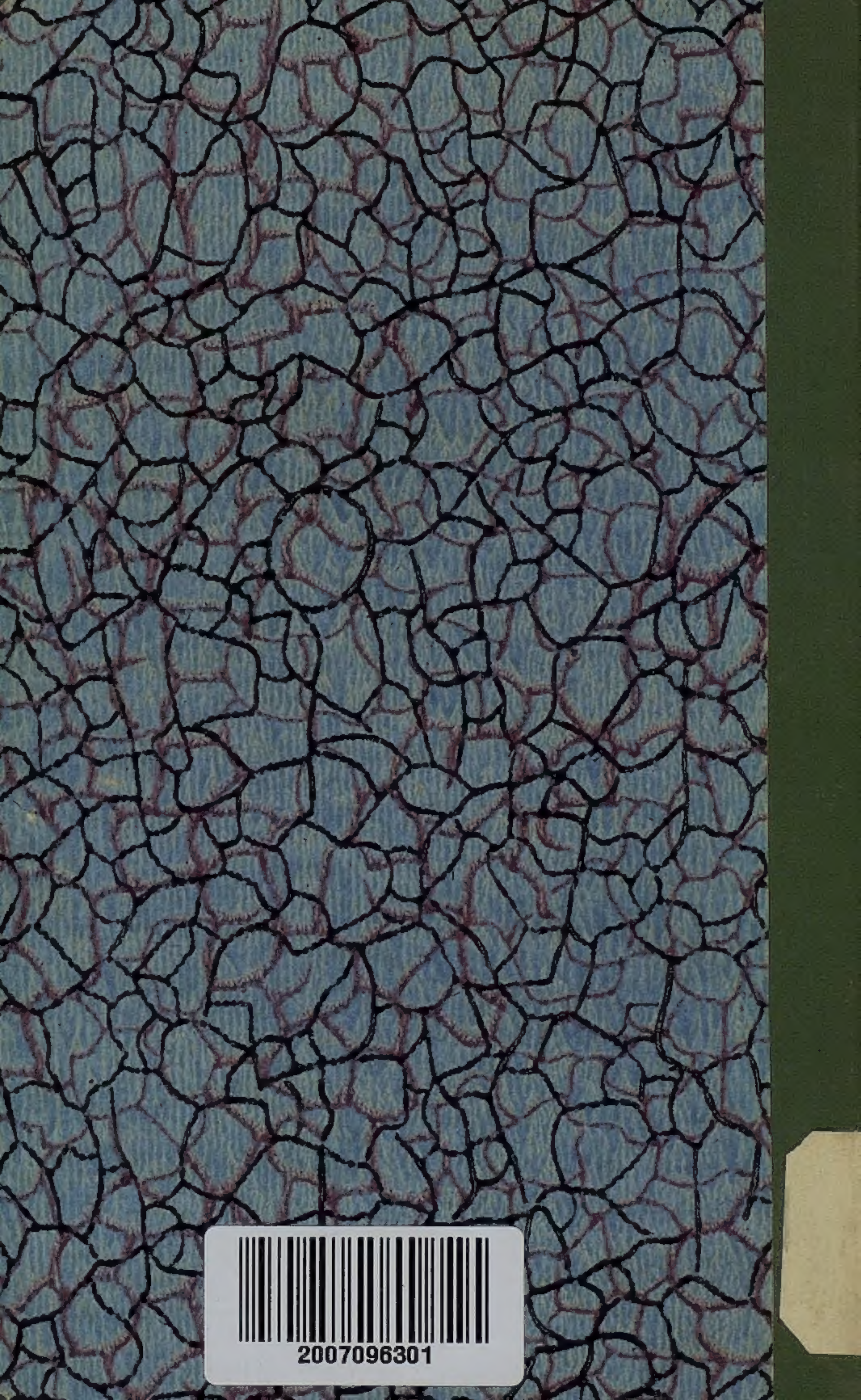
$$(h) \qquad \beta = \frac{8s\sqrt{B} - 4z(B+1)}{(B-1)z^2}$$

гдѣ B, s и z предполагаются данными изъ наблюденія.

Съ другой стороны, величину γ должно разсматривать пропорціональною квадрату скорости вѣтра, слѣдовательно полагать

$$(k) \qquad \gamma = b\,u^2,$$

гдѣ постоянное b зависитъ отъ діаметра и свойства поверхности нити. Но изъ уравненій (g) и (c) опредѣляются H' и $Э'$, послѣ чего изъ уравненій (2) и (3) вычисляются ψ и W, наконецъ изъ уравненія (1) найдется величина u. Остается къ уравненіямъ (k) и (h) присоединить отношеніе $\gamma = \frac{1}{2}\beta H$, для численаго опредѣленія постоянной b. Замѣтимъ однакоже, что формулы (1), (2) и (3) не совсѣмъ достовѣрны, и потому должно желать, чтобы величина u опредѣлялась, покрайнѣй мѣрѣ однажды, непосредственно по способу принятому Физиками.


2007096301